Université Belhadj Bouchaib AIN TEMOUCHENT
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et Informatique

2^{ème} Année LMD

Mme Saiah	Examen de MATH. Algèbre4 (MI)	le 28 / 05 / 2023
-----------	-------------------------------	-------------------

Exercice1: I) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pour $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$. On pose

$$\varphi(u, v) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c, d pour que φ (4pts)

Définisse un produit scalaire.

II) Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$, soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ la base duale de B . On note v_1, v_2 et v_3 les éléments de E^* définis pour tout $P \in E$ par

$$v_1(P) = P(0), \quad v_2(P) = P(1), \quad v_3(P) = P'(1) \quad (3pts)$$

- 1) Montrer que $C^* = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de E^* .
- 2) Donner la matrice de passage Q de B^* à C^* .

Exercice2: Diagonaliser dans une base orthonormée la matrice suivante (5pts)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice3: Soit $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par: (8pts)

$$q(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$$

- 1) Déterminer la forme bilinéaire symétrique associée à q et sa matrice dans la base canonique.
- 2) Décomposer q en combinaison linéaire de carrés. En déduire le rang et la signature de q .
- 3) Q est-elle non dégénérée? Q est-elle positive? Q est-elle négative?
- 4) Déterminer une base B orthogonale de q . Quelle est sa matrice dans cette base?

Corrigé type d'Algebre4

Exercice1: I) 1) φ est symétrique, $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$

Pour $u = (1,0), v = (0,1)$, on a $\varphi(u, v) = b$ et $\varphi(v, u) = c$, donc il faut que $b=c$ (1pt)

2) φ définie positive: $\varphi(u, u) = ax^2 + 2bxy + dy^2 = a(x + \frac{b}{a}y)^2 + \frac{ad-b^2}{a}y^2$ (0.75pt)

3) Pour $u = (1,0)$, on a $\varphi((1,0), (1,0)) = ax^2 > 0$ si $a > 0$ (0.5pt)

4) Si $x = -b$ et $y = a$ alors on trouve : $\varphi(u, u) = a(ad - b^2)$,

Pour que $\varphi(u, u) > 0$ il faut que $ad - b^2 > 0$ (0.75pt)

5) Réciproquement, supposons que $a > 0, b = c$ et $ad - b^2 > 0$, donc φ est symétrique, de plus $\varphi(u, u) = 0$ implique $y = 0$ et $x + \frac{b}{a}y = 0$ ce qui donne $x = y = 0$. (1pt)

II) 1) On a $\text{card}(C^*) = 3 = \dim(E^*)$ (0.25pt)

Soit $P(x) = a + bx + cx^2$

$v_1(P) = P(0) = a$ ce qui donne $v_1 = (1,0,0)$ (0,5pt)

$v_2(P) = P(1) = a + b + c$ ce qui donne $v_2 = (1,1,1)$ (0,5pt)

$v_3(P) = P(1)' = b + 2c$ ce qui donne $v_3 = (0,1,2)$ (0,5pt)

$\det\|v_1, v_2, v_3\| = 1 \neq 0$ (0,5pt)

Donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de E^* .

2) Matrice de passage (0,75pt)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice2:1) La matrice A est symétrique réelle, donc A est diagonalisable dans une base orthonormée. (0,5pt)

2) Les valeurs propres sont $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 6, \alpha_3 = 9$. (0.75pt)

3) Les vecteurs propres sont $u_1 = (2,2,-1), u_2 = (-1,2,2), u_3 = (2,-1,2)$ (1.5pt)

La matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (0,25\text{pt})$$

4) Ces trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux, maintenant ortho normalisez ces vecteurs:

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right), \quad v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad (1,5\text{pt})$$

$$5) A' = P^t \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad (0,5\text{pt})$$

Exercice3: 1) $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + \frac{3}{2}xy' + \frac{3}{2}x'y - 2xz' - 2x'z + \frac{7}{2}yz' + \frac{7}{2}y'z - 2yy' - 6zz' \quad (1\text{pt})$$

$$\text{La matrice de } q \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6 \end{pmatrix} \quad (1\text{pt})$$

$$2)a) \quad q(x, y, z) = 2\left(x + \frac{3}{4}y - z\right)^2 - \frac{25}{8}\left(y - \frac{8}{5}z\right)^2 \quad (2\text{pt})$$

On pose $\varphi_1 = x + \frac{3}{4}y - z$, $\varphi_2 = y - \frac{8}{5}z$ sont linéairement indépendants

b) Rang $q=2$, $S=(s,t)=(1,1)$ (1pt)

3) q est dégénérée car $s+t=2 \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3$. (0,5pt)

On a q n'est pas positive car $t \neq 0$. (0,5pt)

On a q n'est pas négative car $s \neq 0$. (0,5pt)

4) $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ est libre, on va la compléter pour avoir une base $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ avec $\varphi_3 = z$ de duale de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{On a } \begin{cases} x + \frac{3}{4}y - z = a \\ y - \frac{8}{5}z = b \\ z = c \end{cases} \quad \text{ce qui donne } \begin{cases} z = c \\ y = b + \frac{8}{5}c \\ x = a - \frac{3}{4}b - \frac{1}{5}c \end{cases} \quad (2\text{pt})$$

Pour $a=1$, $b=c=0$, on trouve $e_1 = (1,0,0)$

Pour $b=1$, $a=c=0$, on trouve $e_2 = \left(-\frac{3}{4}, \frac{8}{5}, 1\right)$

Pour $c=1$, $a=b=0$, on trouve $e_3 = \left(-\frac{1}{5}, \frac{8}{5}, 1\right)$

Donc la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ est q_orthogonale, ainsi $q(x', y', z') = 2x' - \frac{25}{8}y'$

La matrice de q dans cette base est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{25}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice2:

3)

Analyse de.

Examen
22/23

Questions de cours:

- 1) Si $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ alors f est différentiable. **Vraie** (ON)
- 2) Si $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ alors f est continue. **Vraie** (ON)
- 3) Si f est différentiable alors $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. **Faux** (ON)
- 4) Si f est différentiable en (n_0, y_0) alors $\nabla f(n_0, y_0)$ existe. **Vraie** (ON)
- 5) Si ∇f existe en tout pt alors $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. **Faux** (ON)
- 6) Si ∇f existe en tout pt alors f est continue. **Faux** (ON)
- 7) Si $\nabla f(n_0, y_0)$ existe alors f est différentiable en (n_0, y_0) . **Faux** (ON)
- 8) Si f est différentiable alors f est continue. **Vraie** (ON)

Exercice n°1:

$$f(n, y) = n^3 + 6n^2 + 3y^2 - 12ny + 9n.$$

Les pts critiques:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

en effet:

$$\begin{cases} 3n^2 + 12n - 12y + 9 = 0 \\ 6y - 12n = 0 \Rightarrow y = 2n. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2n \\ 3n^2 + 12n - 12(2n) + 9 = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2n \\ 3n^2 - 12n + 9 = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2n \\ n^2 - 4n + 3 = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow (n, y) \in \{(1, 2), (3, 6)\}.$$

Donc f admet deux pts critiques $(1, 2)$ et $(3, 6)$.

↳ nature de $(1, 2)$:

$$\text{On a } \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial n^2}(n, y) = 6n + 12 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(n, y) = 6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial n \partial y}(n, y) = -12. \end{cases}$$

Pour $(1, 2)$:

$$D = -36 < 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial n^2} = 18.$$

$(1, 2)$ est un pt selle. (ON)

Pour $(3, 6)$:

$$D = 21670 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial n^2}(3, 6) = 30 > 0$$

Donc $(3, 6)$ est minimum local. (ON)

2) on passe aux coordonnées polaires $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

$$\iint_D x^2 dx dy = \iint_{\substack{]1, \sqrt{2}[x] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ r \in [1, \sqrt{2}] \\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} r^3 \cos^2 \theta dr d\theta$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} r^3 dr \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{9\pi}{8}$$

Exercice n°2:

1) Montrons que pour tout $y, y' \in \mathbb{R}$ on a

$$|\sin y' - \sin y| \leq |y' - y|$$

f est de classe C^1 , d'après le thm des accroissements finis, $\exists c \in]y, y'[$
 $+g \quad f(y) - f(y') = f'(c)(y - y')$

comme $|\cos c| \leq 1$ alors

$$|\sin y' - \sin y| \leq |y' - y|$$

$$f_\lambda(n, y) = (y - \frac{1}{2}n, n + \lambda \sin y), \lambda \in \mathbb{R}$$

2) Les composantes de f_λ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, alors f_λ est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$.

3) $\forall (n, y) \in \mathbb{R}^2$

$$Jf_\lambda(n, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial n} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial n} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ \lambda & \lambda \cos y \end{pmatrix}$$

$$Jf_\lambda(0, 0) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

$$[Jf_\lambda(0, 0)]^{-1} = \frac{1}{\det Jf_\lambda(0, 0)} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{\lambda + 2} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

4) on a $\det [Jf_\lambda(n, y)] = -\frac{\lambda}{2} \cos y - 1$

• si $y = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$:
 $|Jf_\lambda(n, y)| = -1 \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

• si $y \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$:
 $|Jf_\lambda(n, y)| \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{2}{\cos y}$

5) $\lambda = 1$: Montrons que f_1 est injective:

soient (n, y) et (n', y') de $\mathbb{R}^2$:

$$f_1(n, y) = f_1(n', y') \Rightarrow$$

$$y - \frac{1}{2}n = y' - \frac{1}{2}n' \quad \text{et} \quad n + \sin y = n' + \sin y'$$

$$\text{d'où } \begin{cases} y - y' = \frac{1}{2}(n - n') \\ n - n' = \sin y - \sin y' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |y-y'| = \frac{1}{2} |n-n'| \\ |n-n'| = |\sin y - \sin y'| \leq |y-y'| \end{cases}$$

(la question est)

d'où $|n-n'| \leq \frac{1}{2} |n-n'|$
 $\Rightarrow |n-n'| = 0 \Rightarrow n = n'$
 et $|y-y'| = 0 \Rightarrow y = y'$

d'où f_n est injective.

6) On f_n est de classe C^1 (q.o.d.)

et injective et

$$|J_{f_n}(x,y)| \neq 0 \text{ car } \cos y \leq 1.$$

Donc le thm de l'inversion globale implique que $f_n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ est un difféomorphisme et on a

$$D_{f_n}^{-1}(f_n(a)) = [Df_n(a)]^{-1}$$

$$\text{alors } D_{f_n}^{-1}(0,0)(R) = [Df_n(a)]^{-1}(R)$$

$$= [J_{f_n}|_{(0,0)}]^{-1} \cdot R$$

$$= \frac{2}{3} (R_2 - R_1, R_1 + \frac{R_2}{2}).$$

Exercice n=03:

1) f est de classe C^1 et $t \mapsto 2+2t$ et $t \mapsto t^2$ le sont aussi donc par composition φ est de classe C^1 .

$$\varphi'(t) = \frac{\partial \pi}{\partial t}(t) \frac{\partial f}{\partial n}(n(t), y(t)) + \frac{\partial f}{\partial t}(t) \frac{\partial f}{\partial y}(n(t), y(t))$$

$$= 2 \frac{\partial f}{\partial n} + 2t \frac{\partial f}{\partial y}$$

2) φ est de classe C^1 par composition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= v \frac{\partial f}{\partial n} + 2u \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= v \frac{\partial f}{\partial n} - 2v \frac{\partial f}{\partial y}$$

3) Les solutions de

$$v \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) + u \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = 0$$

en remplace les dérivées partielles

$$v^2 \frac{\partial f}{\partial n} + 2uv \frac{\partial f}{\partial y} + v^2 \frac{\partial f}{\partial n} - 2uv \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$(v^2 + v^2) \frac{\partial f}{\partial n} = 0$$

les solutions de (E) sont les

$$fct \varphi(y) \text{ i.e. } \varphi(v^2 - v^2).$$

Examen Final de Probabilités

Spécialité : L2 Mathématiques

Dr. MECENE R.

Exercice 1 (Questions de cours) (4,5pts)

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi Binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0.3$.
 - a) Proposer deux approximations pour cette loi. (2pts)
2. Citer l'énoncé de Théorème central limite. (1,5pt)
3. Que vaut $\text{Var}(X + 5)$? (1pt)

Exercice 2 (11pts)

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité suivante :

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{-2x}(1 - e^{-x}), & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la constante c est égale à 6. (1pt)
2. Trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire X . (2pts)
3. Calculer les probabilités suivantes : (3pts)

$$P(-2 \leq 2X \leq 5), P(1,5 \leq X \leq 3) \text{ et } P(|X| \leq 3).$$

4. Soit la variable aléatoire : $Y = e^{-X}$.
 - a) Déterminer la fonction de répartition et la fonction de densité de Y . (2pts)
 - b) Calculer les probabilités suivantes : (2pts)

$$P(Y \leq 0,5) \text{ et } P(|Y - 0,5| \geq 0,1).$$

- c) Calculer l'espérance de Y . (1pt)

Exercice 3 (4,5pts)

Une enquête a été menée auprès de ménages de 4 personnes en vue de connaître leur consommation de lait sur 1 mois. On suppose que sur l'ensemble des personnes interrogées, la consommation X suit une loi Normale avec une moyenne de 20 litres et un écart-type de 5 litres. On souhaite connaître :

1. Le pourcentage des faibles consommateurs (consommation de moins de 10 litres par mois). (1,5pt)
2. Le pourcentage des grands consommateurs (consommation de plus de 30 litres par mois). (1,5pt)
3. Au dessus de quelle consommation se trouvent 33 des consommateurs. (1,5pt)

Annexe : Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. On a : $F_Z(2) = 0,9772$ et $F_Z(0,44) = 0,67$.

Corrigé type - Examen - Probabilités - La-math.

Ex 1 est de Cours.

1) Soit $X \sim \mathcal{B}(200, 0,3)$.

- La loi binomiale peut être approximée par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = nP = 200 \times 0,3 = 60$. (1)

- Elle peut être aussi approximée par la loi normale de paramètres: $\mu = nP = 200 \times 0,3 = 60$ (1)

$$\text{et } \sigma = \sqrt{nP(1-P)} = \sqrt{200 \times 0,3 \times 0,7} =$$

2) Théorème Central Limite: $\approx 6,8$

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi. On note $E(X_i) = \mu$ et $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ et $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, alors on a:

$$\sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, 1) \quad (1,5)$$

$n \rightarrow \infty$

3) $\text{Var}(X+5) = \text{Var}(X)$. (1) (en utilisant les propriétés de la variance).

Ex 2

Soit X v.a. continue de fonction densité:

$$f_X(x) = \begin{cases} c e^{-2x} (1 - e^{-x}) & ; \text{ si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Trouvons c :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} c e^{-2x} (1 - e^{-x}) dx = 1$$

$$\Rightarrow C \int_0^{+\infty} (e^{-2x} - e^{-3x}) dx = 1$$

$$\Rightarrow C \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{-3x} \right]_0^{+\infty} = 1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow C \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = 1 \Rightarrow \boxed{C = 6}$$

2) Trouvons la fonction de la répartition de X.

• Si $x < 0$; $F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0. \quad (0/5)$

• Si $x \geq 0$; $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$

$$= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 6e^{-2t}(1 - e^{-t}) dt.$$

$$= 6 \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-3t} \right]_0^x$$

$$= 6 \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{-3x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right]$$

$$= 1 - 3e^{-2x} + 2e^{-3x} \quad (1/5)$$

Donc :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - 3e^{-2x} + 2e^{-3x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

3) • $P(-2 \leq X \leq 5) = \int_{-2}^5 f_X(x) dx.$

$$= \int_{-2}^0 0 dx + \int_0^5 6e^{-2x}(1 - e^{-x}) dx.$$

$$= 6 \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{-3x} \right]_0^5$$

$$= 6 \left[-\frac{1}{2} e^{-10} + \frac{1}{3} e^{-15} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = 1 - 3e^{-10} + 2e^{-15}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet P(1,5 \leq X \leq 3) &= \int_{1,5}^3 f_X(u) du \\
 &= \int_{1,5}^3 6e^{-2u} (1 - e^{-u}) du \\
 &= 6 \left[-\frac{1}{2} e^{-2u} + \frac{1}{3} e^{-3u} \right]_{1,5}^3 \\
 &= 6 \left[-\frac{1}{2} e^{-6} + \frac{1}{3} e^{-9} + \frac{1}{2} e^{-3} - \frac{1}{3} e^{-4,5} \right] \\
 &= 6 \left[-3e^{-6} + 2e^{-9} + 3e^{-3} - 2e^{-4,5} \right] \\
 &= \cancel{0,007 + 0,0002 + 0,15 - 0,145} \\
 &= 0,007 + 0,0002 + 0,15 - 0,02 \\
 &\approx 0,12
 \end{aligned}$$

(1,5)

4) Soit $y = e^{-x}$

a) Déterminons la fonction de répartition de Y :

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(e^{-X} \leq y) \\
 &= P(-X \leq \ln y) \\
 &= P(X > -\ln y) \\
 &= 1 - P(X \leq -\ln y) \\
 &= 1 - F_X(-\ln y) \\
 &= 1 - \left[1 - 3y^2 + 2y^3 \right] \\
 &= 3y^2 - 2y^3
 \end{aligned}$$

$0 \leq -\ln y < +\infty$
 $-\infty < \ln y \leq 0$
 $0 < y \leq 1$

$$f_Y(y) = 6y - 6y^2 \quad ; \quad y \in [0, 1] \quad (1)$$

b) $P(Y \leq 0,5) = \int_{-\infty}^{0,5} f_Y(y) dy = \int_0^{0,5} f_Y(y) dy$

$(1,5)$

$$= \int_0^{0,5} (6y - 6y^2) dy$$

$$= [3y^2 - 2y^3]_0^{0,5}$$

$$= 3 \times (0,5)^2 - 2 \times (0,5)^3$$

$$= 0,75 - 0,25 = \underline{0,5}$$

$P(|Y - 0,5| \geq 0,1) = 1 - P(|Y - 0,5| \leq 0,1)$

(1) $= 1 - P(-0,1 \leq Y - 0,5 \leq 0,1)$

$$= 1 - P(0,4 \leq Y \leq 0,6)$$

$P(0,4 \leq Y \leq 0,6) = \int_{0,4}^{0,6} f_Y(x) dx = F_Y(0,6) - F_Y(0,4)$

$(0,5)$

$$= \int_{0,4}^{0,6} (6x - 6x^2) dx = 3x^2 - 2x^3 \Big|_{0,4}^{0,6}$$

$$= 3 \times (0,6)^2 - 2 \times (0,6)^3 - 3 \times (0,4)^2 + 2 \times (0,4)^3$$

$$= \underline{0,296}$$

d'où: $P(|Y - 0,5| \geq 0,1) = 1 - 0,296 = \underline{0,704}$

EX 03 consommation moins de 10 litres:

$X \sim N(20, 5) \Rightarrow Z = \frac{X - 20}{5} \rightsquigarrow N(0, 1)$

$P(X < 10) = P\left(\frac{X - 20}{5} < \frac{10 - 20}{5}\right)$

$(1,5)$

$$= P(Z < -2) = F_Z(-2) = 1 - F_Z(2) = \underline{0,023}$$

on a: $P(X < 20) = 0,023 \Rightarrow 2,3\%$ de consommateurs
consommant moins de 20L
Par moi.

$$\begin{aligned} P(X > 30) &= P\left(\frac{X - \mu_0}{\sigma} > \frac{30 - \mu_0}{\sigma}\right) \\ &= P(Z > 2) \\ &= 1 - P(Z \leq 2) \\ &= 1 - F_Z(2) = 0,023 \end{aligned}$$

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

De même, on a 2,3% de consommateurs qui
consommant plus de 30L/moi.

$$P(X > \alpha) = 0,33$$

Trouvons α :

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X - \mu_0}{\sigma} > \frac{\alpha - \mu_0}{\sigma}\right) &= 0,33 \Rightarrow P\left(Z > \frac{\alpha - \mu_0}{\sigma}\right) = 0,33 \\ &\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{\alpha - \mu_0}{\sigma}\right) = 0,33 \\ &\Rightarrow 1 - F_Z\left(\frac{\alpha - \mu_0}{\sigma}\right) = 0,33 \end{aligned}$$

$$33\% \rightarrow P = 0,33$$

$$\Rightarrow F_2 \left(\frac{\alpha - 20}{5} \right) = 1 - 0,33$$

$$\Rightarrow F_2 \left(\frac{\alpha - 20}{5} \right) = 0,67.$$

D'après la Table de la loi Normale on trouve que :

$$F_2 \left(\frac{\alpha - 20}{5} \right) = 0,67 \Rightarrow \frac{\alpha - 20}{5} = 0,44$$

$$\Rightarrow \alpha = (0,44 \times 5) + 20$$

$$\Rightarrow \alpha = 22,2$$

Ainsi, 33% des consommateurs se trouvent au-dessous de 22,2 L.